

# Cinemàtica de la Relativitat especial

Aquestes notes estan inspirades en el llibre *Geometria diferencial i Relativitat*, de Joan Girbau, n. 10 de la col·lecció “Manuals de la UAB”. En alguns moments són gairebé una transcripció del capítol 14 d’aquest llibre, mentre que en d’altres, per exemple a la secció “Transformacions de Lorentz”, se n’ha simplificat el contingut per fer-lo més accessible i menys tècnic.

## Introducció

Newton (com fem la majoria de nosaltres) admetia l’existència d’un espai absolut, immòbil, que podem identificar amb  $\mathbb{R}^3$ , amb un origen qualsevol  $O$ , prefixat arbitràriament. Suposem que un observador  $O'$  es mou respecte de  $O$  (de manera que la posició de  $O'$  dependrà del temps, i per tant és més adequat posar  $O'(t)$ ) amb moviment rectilini uniforme (des d’ara, “mru”). Sigui  $P(t)$  una partícula que es mou. Recordem que l’acceleració és la segona derivada de la posició, i que l’acceleració d’un cos amb mru és 0. Per tant:

$$\frac{d^2}{dt^2}(P(t) - O'(t)) = \frac{d^2 P(t)}{dt^2} - \frac{d^2 O'(t)}{t^2} = \frac{d^2 P(t)}{dt^2}.$$

Resulta, doncs, que l’acceleració relativa de  $P$  respecte de  $O'$  és la mateixa que respecte de  $O$ . Com que les forces depenen de les acceleracions (si  $m$  és la massa de la partícula  $P$ , llavors la força que exerceix  $P$  és  $m \cdot \frac{d^2 P(t)}{dt^2}$ ) i l’acceleració de  $P$  és la mateixa des del punt de vista de  $O$  que des del de  $O'$ , resulta que els dos observadors atribuiran a  $P$  la mateixa força. El mateix passa amb la Llei de la Gravitació Universal: si n’escriviu la fórmula, en la qual apareixen les posicions relatives de dues masses puntuals, trobareu que els dos observadors  $O$  i  $O'$  apreciaran la mateixa força d’atracció entre les dues masses.

De fet, tota la Física clàssica s’enuncia d’idèntica manera respecte de l’origen privilegiat  $O$  que respecte de qualsevol altre observador que es mogui amb mru respecte de  $O$ . No hi ha cap procediment mecànic per saber si el teu sistema de referència està quiet respecte de  $O$  o bé es mou amb velocitat constant en línia recta. Si estàs a dins d’un tren sense finestres en una via perfectament recta, no tindràs manera de distingir si el tren s’està movent amb velocitat constant o s’està quiet.

El que sí es pot afirmar és l’existència d’una classe privilegiada de sistemes de referència, que es diuen *inercials*, que es mouen uns respecte dels altres amb mru, i en referència als quals es pot formular unívocament tota la Física clàssica.

Aquest privilegi dels sistemes inercials se'n va en orris quan intentem formular les lleis de l'electromagnetisme. Resulta que les equacions no són invariants per canvis lineals de coordenades! L'electromagnetisme necessita pressuposar l'existència d'un únic origen absolut de l'espai. D'aquest fet va sorgir a finals del segle XIX la idea de l'“èter”, una mena de gas immòbil que omplia tot l'univers, i que constituïria el sistema de referència absolut. Però cap dels experiments que es van dissenyar per demostrar-ne l'existència no va tenir cap èxit. A més, un famós experiment de Michelson i Morley va constatar un fet terrible: la velocitat de la llum no depèn de la velocitat de l'observador! Si tu estàs a dins d'un cotxe que va a 50 Km/h i per l'altre carril se n'acosta un altre que va a 30 Km/h, si mesures la seva velocitat obtindràs 80 Km/h. En canvi, la policia, que està aturada al costat de la carretera, li mesurarà una velocitat de 50 Km/h. Doncs bé, si en lloc d'un cotxe se t'acosta un raig de llum, tant tu com la policia obtindreu la mateixa mesura: 300000 Km/s. Això és terriblement desconcertant.

En aquesta situació, diversos matemàtics com ara Voigt, Poincaré i Lorentz van ser capaços de trobar un canvi de coordenades que, al contrari que el canvi lineal (el simple canvi d'origen), sí que deixava invariants les equacions de l'electromagnetisme. Però resulta que les fórmules d'aquest canvi de variable implicaven un canvi en l'escala del temps!! Tothom va pensar que això era un simple raonament matemàtic molt enginyós que no es podia correspondre, de cap manera, a cap mena de realitat física.

En aquest carreró sense sortida en què es trobava la Física a l'inici del segle XX, va aparèixer Albert Einstein.

## Els postulats de la Relativitat especial

Triem (arbitràriament) un origen  $O$  de  $\mathbb{R}^3$ . És una referència canònica, immòbil, amb tres eixos perpendiculars que surten de  $O$ , i amb una orientació triada. Aquest origen queda fixat d'ara endavant.

**Definició** (raonable): Siguin  $A$  i  $B$  dos punts immòbils respecte de  $O$ . Siguin  $R_A$  i  $R_B$  dos rellotges situats, respectivament, en  $A$  i  $B$ . Suposem que un observador situat en  $A$  emet un raig de llum en direcció a  $B$ , a temps  $t_0$  del rellotge  $R_A$ . L'observador situat a  $B$  rep el raig a temps  $t'_0$  del rellotge  $R_B$ . El raig rebota en un mirall i torna cap a  $A$ . Arriba a temps  $t_1$  del rellotge  $R_A$ . Direm que els rellotges  $R_A$  i  $R_B$  *estan sincronitzats* si  $t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0$ .

**Definició** (raonable): Anomenarem *sistema de referència* al conjunt de 3 eixos perpendiculars amb un origen comú, amb una determinada orientació, i de manera que, a cada punt de l'espai immòbil respecte d'aquest eixos, hi ha un rellotge. A més, donats 2 d'aquests punts immòbils, els 2 rellotges corresponents estan sincronitzats.

**Definició** (raonable): Diem que dos sistemes de referència  $S$  i  $S'$  són *equivalents* si, o bé estan immòbils un respecte de l'altre, o bé compleixen:

1. Cada un d'ells es mou respecte de l'altre amb mru.
2. Dos esdeveniments ocorreguts en un punt immòbil respecte de  $S$  són vistos des de  $S'$  en el mateix ordre temporal amb què els ha vist un observador des de  $S$  (i viceversa).
3. Es fa l'experiment següent: s'observen des de  $S'$  dos esdeveniments ocorreguts en un punt  $A$  immòbil respecte de  $S$  i separats per un interval de temps (de  $S$ ) de longitud 1. Com que  $S$  es mou respecte de  $S'$ , aquests dos esdeveniments són vistos des de  $S'$  en dos punts diferents de l'espai. Es mesura a  $S'$  la distància entre els dos punts. Aleshores, hem d'obtenir el mateix valor de distància si repetim l'experiment intercanviant els papers de  $S$  i  $S'$ .

**Principi de Relativitat** (raonable): Existeix una classe privilegiada de sistemes de referència, que anomenarem *inercials*, que compleixen:

1. Si  $S$  és inercial i en desplaçem els eixos, el sistema de referència que obtenim també és inercial.
2. Si  $S$  és inercial i  $P$  és un punt amb mru respecte de  $S$ , existeix un sistema inercial que té  $P$  per origen.
3. Dos sistemes inercials sempre són equivalents.
4. Els observadors que viatgen en qualsevol sistema de referència inercial poden enunciar TOTES les lleis de la Física (per exemple, les de l'electromagnetisme) d'identica manera.

**Principi d'invariància de la velocitat de la llum** (gens raonable, inconcebible): Si un observador immòbil respecte d'un sistema inercial  $S$  contempla la propagació en el buit d'un raig de llum, emès per qualsevol focus lluminós, observarà que es propaga amb mru amb velocitat constant, independentment del moviment del focus i del sistema inercial  $S$ . Anomenarem  $c$  a la velocitat dels raigs de llum.

## Transformacions de Lorentz

Siguin  $S$  i  $S'$  dos sistemes de referència inercials. Un esdeveniment qualsevol, vist per un observador solidari amb  $S$ , queda determinat per 4 coordenades  $(x^1, x^2, x^3, t)$  (les 3 espacials més el temps dels rellotges de  $S$ ). El mateix

passa des d'un altre sistema  $S'$  qualsevol. Diguem  $(x'^1, x'^2, x'^3, t')$  a les coordenades de l'esdeveniment observat des de  $S'$ . Ens preguntem com canvien les coordenades d'un esdeveniment quan l'observem des d'un o altre sistema de referència. En altres paraules, ens preguntem quina és la fórmula de la funció que transforma  $(x^1, x^2, x^3, t)$  en  $(x'^1, x'^2, x'^3, t')$ . Anomenarem *aplicació de Lorentz* a la funció  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(x^1, x^2, x^3, t) = (x'^1, x'^2, x'^3, t')$ .

A partir d'ara aplicarem un seguit de raonaments matemàtics basats en els postulats que hem enunciat a la secció anterior. Per simplificar l'escriptura, d'ara endavant suposarem que col·lapsem les 3 coordenades espacials en una, i per tant pensarem que vivim en un món de dimensió 1, i no pas de dimensió 3. Els raonaments que farem es poden aplicar de manera semblant al cas general, només és una qüestió d'escurçar l'escriptura. Així doncs, tenim una coordenada per a l'espai,  $x$ , i una altra pel temps,  $t$ :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\longrightarrow (x', t') \end{aligned}$$

Si anem a la definició, del primer que ens hauríem d'adonar és que  $f$  és bijectiva, i la seva inversa  $f^{-1}$  és la funció que transforma les coordenades d'un esdeveniment vist des de  $S'$  en les coordenades del mateix esdeveniment vist des de  $S$ . O sigui,  $f^{-1}(x', t') = (x, t)$ .

**Lema 0.1**  *$f$  transforma rectes que no són de la forma  $t = \text{constant}$  en rectes que no són de la forma  $t' = \text{constant}$ . Anàlogament,  $f^{-1}$  transforma rectes que no són de la forma  $t' = \text{constant}$  en rectes que no són de la forma  $t = \text{constant}$ .*

*Demostració.* Sigui  $r$  una recta que no és de la forma  $t = \text{constant}$ . Aleshores,  $r$  es pot parametritzar de la següent manera:

$$\begin{cases} t = t \\ x = vt + b \end{cases}$$

per a certes constants  $v$  i  $b$ . Però això és l'equació del moviment d'una partícula  $P$  que es mou respecte de  $S$  (i amb el temps  $t$  dels rellotges de  $S$ ) amb mru de velocitat constant  $v$ . Per la condició (2) del Principi de Relativitat, existeix un sistema inercial  $S''$  que té  $P$  per origen. Per la condició (3) del Principi de Relativitat,  $S''$  es mou respecte de  $S'$  amb mru. O sigui,  $P$  es mou respecte de  $S'$  amb una velocitat constant qualsevol  $v'$ . Per tant, el seu moviment (a  $S'$ ) està descrit per una equació del tipus  $x' = v't' + b'$ , que és una recta que no és de la forma  $t' = \text{constant}$ , tal com volíem demostrar.

És obvi que el mateix raonament es pot aplicar si intercanviem els papers de  $f$  i  $f^{-1}$ . ■

**Lema 0.2**  $f$  conserva el paral·lisme de les rectes (i, per tant, també  $f^{-1}$ ).

*Demostració.* És conseqüència del fet que és bijectiva: si dues rectes  $r$  i  $r'$  no es tallen, llavors  $f(r)$  i  $f(r')$  tampoc. ■

**Lema 0.3**  $f$  també transforma rectes de la forma  $t = \text{constant}$  en rectes de la forma  $t' = \text{constant}$ .

*Demostració.* Si existeix una recta  $t = k$  que és transformada per  $f$  en una recta  $t' = k'$ , llavors  $f$  transforma totes les rectes de la forma  $t = \text{constant}$  en rectes de la forma  $t' = \text{constant}$  (perquè, pel Lema 0.2,  $f$  conserva el paral·lisme de les rectes). Per tant, o bé  $f$  no transforma cap recta de la forma  $t = \text{constant}$  en rectes de la forma  $t' = \text{constant}$ , o bé les transforma totes. Si les transforma totes, hem acabat. Suposem que no en transforma cap. Sigui  $r$  la recta  $t = k$  per a una certa constant  $k$ . Estem suposant que  $f(r)$  és una recta que no és de la forma  $t' = \text{constant}$ . Per tant, aplicant el Lema 0.1 a  $f^{-1}$  i la recta  $f(r)$ , tenim que  $f^{-1}(f(r))$  no és de la forma  $t = \text{constant}$ . Això és una contradicció perquè  $f^{-1}(f(r)) = r$ , que té per equació  $t = k$ . ■

**Teorema 0.4**  $f$  és una afinitat.

*Demostració.* És conseqüència dels lemes 0.1, 0.2 i 0.3, ja que un conegut teorema de geometria ens diu que tota aplicació de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  que transforma rectes en rectes i conserva el paral·lisme és una afinitat. ■

Pel Teorema 0.4, ara ja sabem que la fórmula de  $f$  té aquest aspecte:

$$\begin{cases} x' = ax + bt + g \\ t' = dx + et + h \end{cases}$$

El següent pas és intentar determinar el valor de les constants  $a, b, d, e, g, h$ . Podem imposar que  $f(0, 0) = (0, 0)$  fent un simple canvi en l'origen del temps. Triem l'instant 0 del temps dels rellotges com l'instant en què coincideixen els orígens de  $S$  i de  $S'$ . O sigui,  $x = x' = 0$  quan  $t = t' = 0$ . Això ens permet dir que  $g = h = 0$ :

$$\begin{cases} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{cases}$$

Tot seguit fem un experiment físic que ens demostrarà que  $e > 0$ . A l'instant  $t = t' = 0$ , quan els orígens  $x = x' = 0$  coincideixen, encenem un llum des de l'origen de  $S$ . A temps  $t_0$  (del temps de  $S$ ) ho tornem a fer. El primer

esdeveniment té coordenades  $(0, 0)$ , tant des de  $S$  com des de  $S'$ . El segon esdeveniment té coordenades  $(0, t_0)$  vist des de  $S$  i, diguem,  $(x', t'_0)$  vist de de  $S'$ . Per tant, tenim:

$$\begin{cases} x' = a \cdot 0 + bt_0 = bt_0 \\ t'_0 = d \cdot 0 + et_0 = et_0 \end{cases}$$

Ara bé, com que  $t_0 > 0$  i, per la condició (2) dels sistemes equivalents, dos esdeveniments han de ser vistos en el mateix ordre temporal des de  $S$  i des de  $S'$ , tenim que  $t'_0 > 0$ . Per tant, també  $e > 0$ .

Ara definim una nova quantitat (més tard en farem la interpretació física). Definim  $v = -b/e$ . Amb aquesta nova lletra, la fórmula de  $f$  queda així:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = ax - vet \\ t' = dx + et \end{cases}$$

Fem un altre experiment físic. Emetem un raig de llum des de l'origen de  $S$  ( $x = 0$ ) a temps  $t = 0$  de  $S$  (i, per tant, també  $x' = t' = 0$ ). Les coordenades  $(x, t)$  dels punts de l'espai a on va arribant el raig de llum compleixen la relació  $x = \pm ct$ . I, pel principi d'invariància de la velocitat de la llum, els mateixos punts vistos des de  $S'$  tenen coordenades  $(x', t')$  que compleixen  $x' = \pm ct'$ . Posant aquí les fórmules de (1) per a  $x'$  i  $t'$ , tenim que  $(ax - vet)^2 - c^2(dx + et)^2 = 0$ , o sigui,

$$(2) \quad a^2x^2 + v^2e^2t^2 - 2avext - c^2d^2x^2 - c^2e^2t^2 - 2c^2dext = 0$$

Com que els punts de l'espai que compleixen  $x^2 - c^2t^2 = 0$  són els mateixos que compleixen  $x'^2 - c^2t'^2 = 0$ , tenim que les quàdriques (2) i  $x^2 - c^2t^2 = 0$  són la mateixa, tret, potser d'una constant  $\rho \neq 0$ :

$$a^2x^2 + v^2e^2t^2 - 2avext - c^2d^2x^2 - c^2e^2t^2 - 2c^2dext = \rho(x^2 - c^2t^2)$$

Igualant termes semblants, això ens dóna 3 igualtats:

$$(3) \quad a^2 - c^2d^2 = \rho$$

$$(4) \quad v^2e^2 - c^2e^2 = -\rho c^2$$

$$(5) \quad -ave - c^2de = 0$$

De (5) obtenim que  $d = -av/c^2$ . Això, juntament amb (3), ens dóna que  $\rho = (1 - v^2/c^2)a^2$ . D'altra banda, de (4) tenim que  $\rho = (1 - v^2/c^2)e^2$ . Igualant aquests dos darrers valors de  $\rho$  i simplificant, descobrim que  $a^2 = e^2$ . Canviant, si cal, l'orientació de l'eix del sistema  $S'$ , podem aconseguir que

$a > 0$ . Com que ja sabíem que  $e > 0$ , tenim que  $a = e$ . Per tant, la fórmula de  $f$  ens queda:

$$(6) \quad \begin{cases} x' = ex - vet \\ t' = \left(\frac{-ev}{c^2}\right)x + et \end{cases}$$

Continuem amb els raonaments. Ara en fem un de purament matemàtic: com que  $f$  ha de tenir inversa, el determinant de la matriu del sistema d'equacions (6), que és  $e^2 - v^2e^2/c^2$ , ha de ser diferent de 0. Això ens diu que  $|v| \neq 0$ . Si calculem la inversa de  $f$ , obtindrem

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{e(1-v^2/c^2)}x' + \frac{v}{e(1-v^2/c^2)}t' \\ t = \frac{v}{c^2e(1-v^2/c^2)}x' + \frac{1}{e(1-v^2/c^2)}t' \end{cases}$$

Fem un altre experiment físic. Encenem un llum a temps  $t = 0$  de l'origen  $x = 0$  de  $S$  (per tant, també  $t' = x' = 0$ ), i n'encenem un altre 1 segon més tard a l'origen de  $S$  ( $x = 0, t = 1$ ). Els dos llums són vistos des de  $S'$  en dos llocs diferents: el primer, a  $x' = 0$ ; i, el segon -ho trobarem aplicant (6)-, a  $x' = -ve$ . Fent el mateix raonament intercanviant els papers de  $S$  i  $S'$  (i aplicant, és clar, (7) en lloc de (6)), obtenim que la distància vista des de  $S'$  és  $\frac{-v}{e(1-v^2/c^2)}$ . Per la condició (3) de la definició de sistemes equivalents, les dues distàncies han de ser iguals. Si les iguaieu i simplifiqueu  $v$  a cada costat, descobrireu per fi el valor de  $e$ :  $e = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . També descobrireu que l'expressió  $1 - v^2/c^2$  és igual a  $e^2$ , que és positiva. Del fet que  $1 - v^2/c^2 > 0$  es dedueix el següent important fet, que més tard comentarem:

$$(8) \quad |v| < c$$

Amb el valor calculat de  $e$ , hem acabat la nostra deducció de la fórmula de la transformació de Lorentz. És la següent:

$$(9) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t \\ t' = \frac{-v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t \end{cases}$$

És fàcil calcular la transformació inversa, que passa de coordenades  $(x', t')$  a coordenades  $(x, t)$ :

$$(10) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x' + \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t' \\ t = \frac{v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}x' + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t' \end{cases}$$

Finalment, donem la important interpretació física de la quantitat  $v$  que havíem introduït anteriorment: observem que les coordenades  $(x, t)$  de l'origen  $x' = 0$  de  $S'$  són, segons (10),

$$x = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t', \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t'$$

Per tant,  $t' = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$  i, consegüentment,  $x = vt$ . Aquesta és l'equació que relaciona l'espai i el temps de l'origen del sistema  $S'$ . És, doncs, l'equació del moviment d'aquest origen, i per tant cal interpretar  $v$  com la velocitat del sistema  $S'$  respecte del sistema  $S$ . O sigui, és la velocitat amb què els observadors quiets de  $S$  veuen que es mou el sistema  $S'$ . Recordem que a (8) havíem vist que aquesta velocitat ha de ser més petita que la velocitat de la llum!

En aquest punt s'observa un petit problema. Les equacions de Lorentz, (9) i (10), no tenen sentit si el terme que apareix a dins de les arrels quadrades és negatiu o zero. O sigui, si  $|v| \geq c$ . Amb això ens hi hem trobat al final, no ho havíem pas exigut en els axiomes. A més, si observeu les equacions (9) us adonareu que no compleixen pas el Lema 0.3:  $f$  no transforma rectes de la forma  $t = \text{constant}$  en rectes de la forma  $t' = \text{constant}$  !! Resulta, doncs, que la teoria és contradictòria, i això vol dir que els postulats dels quals hem partit són incompatibles, no poden ser certs tots alhora. Repassant la demostració pas a pas us convencereu que l'única contradicció deriva del fet d'haver permès qualsevol velocitat per al mru d'un sistema inercial. Només podem permetre velocitats que compleixin (8), o sigui, que siguin menors que la velocitat de la llum. Hem de modificar lleugerament el postulat (2) del Principi de Relativitat: "Si  $S$  és un sistema inercial i  $P$  és un punt que es mou amb mru respecte de  $S$  amb velocitat  $|v| < c$ , llavors existeix un sistema inercial que té  $P$  per origen". Podeu repassar tota la demostració amb els nous postulats i obtindreu les mateixes equacions, utilitzant els mateixos raonaments.

Observem el fet, molt remarcable, que res no pot viatjar amb moviment rectilini uniforme a una velocitat més gran que la de la llum!

## Conseqüències dels postulats de la Relativitat

### Les longituds s'escurcen

Considerem una barra  $AB$  de longitud 1 metre, quieta respecte dels observadors de  $S$  ( $A$  i  $B$  són dos punts de l'espai, i  $B - A = 1$ ). Aquesta barra, observada des del sistema  $S'$ , es mourà. Quina distància d'extrem a extrem li atribuiran els observadors de  $S'$ ? És a dir: a un temps qualsevol  $t'_0$  dels rellotges de  $S'$ , quines seran les coordenades  $A'$  i  $B'$  dels extrems de la barra? Només cal anar a les equacions de Lorentz (9). Si substituïm  $x$  per  $A$  i aïlleu  $x'$ , obtindreu:

$$A' = A\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'_0.$$

Fent el mateix pel punt  $B$ , tenim

$$B' = B\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'_0.$$

Així doncs, la longitud que els observadors de  $S'$  atribuiran a la barra serà  $B' - A' = (B - A)\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Com que  $B - A = 1$ , tenim que la longitud de la barra vista des de  $S'$  és

$$\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Aquesta quantitat és menor que 1 metre! Per exemple, si els observadors de  $S'$  es mouen a 1000 Km/s, creuran que la barra té una longitud de 0.9999944442 metres! Òbviament l'escurçament de les distàncies només és força apreciable quan els observadors es mouen amb velocitats properes a la de la llum. Per exemple, anant a la meitat de la velocitat de la llum, 150000 Km/s, la barra mesurarà 0.8660254040 metres.

### Els temps es dilaten

Suposeu que en un punt  $A$ , immòbil respecte de  $S$ , s'encenen dos llums, un a temps  $t_0$  i l'altre a temps  $t_1$  (dels rellotges de  $S$ ). Apliquem la transformació de Lorentz (9) per saber les coordenades temporals  $t'$  d'aquests dos esdeveniments:

$$t'_0 = \frac{-(v/c^2)A + t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_1 = \frac{-(v/c^2)A + t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Per tant, l'interval temporal que els observadors de  $S'$  apreciarien entre els dos esdeveniments és

$$t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

que és diferent a l'interval observat des de  $S$ ,  $t_1 - t_0$  !! Per exemple, si els observadors de  $S'$  es mouen a 200000 Km/s i entre els dos esdeveniments ha passat 1 any (dels rellotges de  $S$ ), un observador de  $S'$  dirà que han passat 1.341640786 anys, o sigui 1 any, 4 mesos i alguns dies. El temps passa més lentament per als observadors en moviment!

Això dóna lloc a la coneguda "paradoxa dels bessons", perquè si ho penseu bé us adonareu que es pot considerar que els observadors de  $S'$  estan quietes i que són els de  $S$  els que es mouen respecte dels de  $S'$ . Per tant, repetint el raonament arribareu a la conclusió que també el temps passa més lentament per als observadors de  $S$  que per als de  $S'$ . En realitat aquesta paradoxa no és tal, i si es formula adequadament en termes matemàtics es pot resoldre satisfactòriament.

### Es perd la simultaneïtat

Considerem que s'encenen dos llums alhora (a temps  $t_0$  dels rellotges de  $S$ ) en dos punts diferents  $A$  i  $B$ . Les seves coordenades de  $S$  són, per tant,  $(A, t_0)$  i  $(B, t_0)$ . Aplicant (9) trobarem que, respecte de  $S'$ , els dos esdeveniments són vistos en instants:

$$t'_1 = \frac{-(v/c^2)A + t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{-(v/c^2)B + t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Com que  $A$  i  $B$  són diferents,  $t'_1$  i  $t'_2$  són diferents, de manera que els dos esdeveniments, vistos pels observadors de  $S'$ , deixen de ser simultanis!!